

Title	距離ツケラレタ環ニ於テ閉ヂタ連續群 III
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 70 p.5-p.7
Issue Date	1935-12-13
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74220">https://doi.org/10.18910/74220</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 298. 距離ツケラレタ環ニ於テ関デタ 連続群 III

吉田耕作 (阪大)

前談話 280 = 於テ  $\mathcal{O}_f$  の differentiability 7  $\mathcal{O}_f$  が  $topological$  + 條件カラ出セナイカト申シマシタガ次ノコトガ云ヘル様デス。

定理  $R = \text{einbetten}$  シタ群  $\mathcal{O}_f$  が *locally compact* + ラバ  $\mathcal{O}_f$  は *differentiable* デアル。

$\mathcal{O}_f$  の dimension finite 7 假定レテアリマセン。証明 = ハニツノ lemma 7 要シマス。

Lemma 1. 任意ノ群  $\mathcal{O}_f$  は *arbitrarily small cyclic group* 7 *subgroup* トシナイ。

証. 任意ニ小ナル  $\delta > 0$  = 對シ,  $A \neq E$   $|A^n - E| \leq \delta$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  7 満足スル如キ  $A$  が  $\mathcal{O}_f$  = ハ存在シナイ。何者, 若シ斯カル  $A$  が或ル小サナ  $\delta$  = 對シ存在スレバ

$$\begin{aligned} \ln A^n &= A_n - E + O(|A_n - E|^2) \\ &= \text{ヨリ } |\ln A^n| = |n \ln A| = |n| |\ln A| \leq |A_n - E| + O(|A^n - E|^2) \\ &= \delta + O(\delta^2). \end{aligned}$$

之ハ  $n \rightarrow \infty$  ノトキ矛盾デアル。

Lemma 2.  $\mathcal{O}_f$  が *locally compact* + ラバ  $A_i \in \mathcal{O}_f$ ,  $A_i \neq E$ ,  $A_i \rightarrow E$  + ル  $\{A_n\}$  = 對シ適當ナ *Teilfolge*  $\{A'_n\}$  7 トルト  $A_n'^{p_n} \rightarrow A \neq E$  + ル如キ整数  $p_n$  ノ *folge* アリ。

証. Lemma 1 =ヨリ各  $A_i$  =對シ

$$\left| A_i^{p_i \pm 1} - E \right| \leq \delta, \quad \left| A_i^{p_i} - E \right| > \delta$$

ナル如キ整数  $p_i$  アリ (但シ  $p_i > 0$  ノトキハ  $p_i - 1$ ,  $p_i < 0$  ノトキハ  $p_i + 1$  ノ方ヲトル。又勿論  $|A_i - E| < \delta$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  トス)  $A_i \rightarrow E$  ト  $O_f$  , composition , stetigkeit (ソ, topology ハ  $\mathbb{R}$  , ソレト同シ) カラ

$$\left| A_i^{p_i} - E \right| \leq \varepsilon(\delta), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

ナル如キ  $\varepsilon(\delta)$  が存在スル。ヨツテ  $O_f$  , locally compact ナコトカラ Lemma ヲ得ル。

Lemma 3.  $O_f$  が locally compact ナラ  $O_f$  ハ  $E$  = 於テ differentiable テアル。

証.  $A_i \in O_f$ ,  $A_i \neq E$ ,  $A_i \rightarrow E$  トス。Lemma 2 =ヨリ  $A_i'^{p_i} \rightarrow A \neq E$  ナル如キ  $A_i'$ ,  $p_i$  アリ。ヨツテ

$$\ln A_i'^{p_i} = p_i \ln A_i' \rightarrow \ln A \neq 0$$

$$\text{依ツテ } p_i (A_i' - E) \rightarrow \ln A \neq 0$$

— 以上 —

ヨツテ先, Fundamental theorem ヲ次ノ如ク述べルコトが出来ル。

Fundamental theorem. Metrical complete ring  $\mathcal{R}$  = 於テ開タタ連続群  $O_f$  が

i) of finite dimension

ii) locally compact

iii) zusammenhängend

ナラバ  $\mathcal{O}_X$  は Lie 群デアール。

之ハ Hilbert の問題, special case ノーツノ解答デアール。

尚先, differentiability の定義 = 於ケル「正数  $\varepsilon_i$ 」ヲ「實数  $\varepsilon_i$ 」トシタ方が話が symmetric = ナル。又  $n$  が負整数ノ場合,  $\ln A^n$  ヲモ考ヘテ  $A$  が充分  $E$  = 近ケレバ  $\ln A^n = n \ln A$  ヲ上ノ議論中 = 使ッタ。differentiability = ツイテモコノ「實数  $\varepsilon_i$ 」ノ意味ヲ議論シマシタ。

今ノーツ上, Fundamental theorem = 於テ  $\mathcal{O}_X$  が  $\mathcal{R}$  = 於テ開デテアルト云フコトハ「 $\mathcal{O}_X$  が Einheit, 近傍 = 於テ  $\mathcal{R}$  ノ中デ開デテアル」= 直セマス。

即チ斯カル近傍, element が  $\exp. U$ ,  $U \in \mathcal{U}$  ト表ハセルコトノ証明ハ先ノ証明 (前論 280) ヲ少シ modify スレバヨイノデスカラ。デカラ南雲氏ノ結果ガ上ノ Fundamental theorem ノ系トシテ得ラレマス。